الفضاءات المترية المحدبة وتطبيقاتهم في التحليل الغير خطي

ريهام زهير علي العطاس

المشرف الرئيسي د. لياقت علي خان

المشرف المشارك د. سعود مستور السلمي

بحث مقدم لنيل درجة الماجستير في العلوم

قسم الرياضيات، كلية العلوم

جامعة الملك عبد العزيز، جدة، المملكة العربية السعودية

رجب 1434هـ - مايو 2013 م.

قال تعالى: (وَعَلَّمَكَ مَا لَمْ تَكُنْ تَعْلَمُ وَكَانَ فَضْلُ اللَّهِ عَلَيْكَ عَظِيمًا)

سورة النساء آية 113.

الدراسات والأبحاث التي تشتمل عليها هذه الرسالة لم يسبق التقدم بها أو بجزء منها للحصول على أي درجة علمية في هذه الجامعة أو أي جامعة أخرى.

ريهام زهير العطاس.

إهداء

إلى والدي الحبيبين..

شكر وتقدير

 الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد الأنبياء والمرسلين. الشكر أولا وآخرا للمولى سبحانه وتعالى على أن أمدني بالحول والقوة لاستكمال هذا العمل.

 كما أتوجه بالشكر الجزيل لوالدي الحبيبين فهما بدعائهما لي كشمعة مضيئة تضيء مسيرتي فجزاهما الله عني خير الجزاء.

كما لا أنسى أن أشكر إخواني وأخواتي وصديقاتي الذين كانوا عونا لي في إتمام هذا البحث.

 وإنه لمن دواعي سروري أن أعرب عن شكري وتقديري لمشرفي الفاضل الدكتور" لياقت علي خان" على توجيهاته القيمة وتشجيعه المستمر لي خلال إشرافه على إعداد هذه الرسالة.

كما أود أن أتقدم بجزيل الشكر والعرفان إلى من وقف على المنابر وأعطى من حصيلة فكره لينير دربي إلى الأساتذة الكرام في قسم الرياضيات بجامعة الملك عبد العزيز, كما أخص بالشكر د. عبدالله العتيبي (رئيس قسم الرياضيات), دسعود السلمي, د. محمد الغامدي , د. هنيدة ملائكة , د. سلمى الطويرقي و د. فاطمة قنديل.

**المستخلص**

  التحدب المتري هو مفهوم أساسي في دراسة هندسة الفضاءات المترية. هناك العديد من الطرق التي يمكن أن تقدم فكرة التحدب في هذه الفضاءات. في هذه الرسالة، نأخذ بعين الاعتبار الفضاءات المترية المحدبة- $W$ ، التي قدمت عن طريق Takahashi في عام )1970). تشمل هذه الفضاءات فضاءات بناخ, المجموعات الجزئية المحدبة منها ومجموعات جزئية معينة من الفضاءات المترية الخطية. في وقت لاحق، طور Machado (1973)، Talman (1977), Naimpally, Singh و Whitfield (1983)، وBeg و Azam (1986) نظريات النقطة الثابتة التي تم الحصول عليها في الفضاءات-$ W$ المترية المحدبة. ومنذ ذلك الحين كان هناك تطورات كبيرة في هذا المجال, كما تعتبر في الوقت الحاضر منطقة نشطة للبحث. وقد تم مؤخرا إحراز مزيد من التقدم المنجز في الدراسة ذات الصلة بفضاءات المحدبة-$ M$، الفوق محدبة و CAT (0). في هذه الرسالة، قدمنا بحثا محدثا في هذا المجال، وكذلك تطبيقاته في التحليل الغير خطي بما في ذلك نظرية النقطة الثابتة وأفضل تقريب.

**ملخص الرسالة**

مفهوم التحدب يلعب دورا هاما في الكثير من النتائج في الرياضيات. على وجه الخصوص، التحدب المتري هو مفهوم أساسي في دراسة الفضاءات المترية المحدبة. هناك العديد من الطرق التي يمكن أن تعرض فكرة التحدب في هذه الفضاءات. قدم مفهومي التحدب المنتظم والتحدب الحاد لأول مرة في فضاءات بناخ بواسطة Clarkson في عام (1936). تم تمديد هذه المفاهيم للفضاءات المترية الخطية عن طريق Ahuja ، Narang و Trehan في عام (1977). وفي عام (1956) تم إدخال التحدب الفوقي في الفضاءات المترية العامة (وليس بالضرورة الخطية) بواسطة Aronszajn و Panitchpakdi. كما قدم مفهوم التحدب-$ M$ بواسطة Khalil في عام (1988).

    وجهة نظر مختلفة لمفهوم التحدب قدمت بواسطة Takahashi(1970)، الذي يعتبر أن أي فضاء متري $(X,d)$ يكون محدبا إذا وجدت دالة $W:X×X×I\rightarrow X$، تدعى بنية محدبة, و كان لأي

$\left(x,y,t\right)\in X×X×I, z\in X,$

$d\left(z,W\left(x,y,t\right)\right)\leq td\left(z,x\right)+\left(1-t\right)d\left(z,y\right).$

    تسمى المجموعة $X$ مع هذه البنية المحدبة الفضاء المتري المحدب-$W$ (أو الفضاء WCM) ويشار إليه ب $(X,d,W)$. تشمل هذه الفضاءات فضاءات بناخ, المجموعات الجزئية المحدبة منها ومجموعات جزئية معينة من الفضاءات المترية الخطية. في وقت لاحق، طور Machado (1973)، Talman (1977), Naimpally, Singh و Whitfield (1983)، وBeg و Azam (1986) نظريات النقطة الثابتة التي تم الحصول عليها في الفضاءات-$ W$ المترية المحدبة. ومنذ ذلك الحين كان هناك تطورات كبيرة في هذا المجال, كما تعتبر في الوقت الحاضرمنطقة نشطة للبحث. وقد تم مؤخرا إحراز مزيد من التقدم المنجز في الدراسة ذات الصلة بالفضاءات المحدبة-$ M$، الفوق محدبة و CAT (0) (انظر قائمة المراجع).

    في هذه الرسالة، قدمنا ​​عرضا لنتائج هؤلاء المؤلفين حول نظرية النقطة الثابتة وأفضل تقريب والحصول على بعض النتائج المعممة.

    في الباب الأول، نقدم التعاريف والنتائج الأساسية في التحليل الدالي. وتشمل هذه, الفضاءات التوبولوجية، فضاءات الـNormed، التبولوجي الضعيف , الـHausdorff المتري، الفضاء المحدب الحاد والمنتظم, وأفضل تقريب.

في الباب الثاني، نقدم بعض النظريات الكلاسيكية للنقطة الثابتة وبعضا من التعميمات المهمة الخاصة بهم. وتشمل هذه النتائج الشهيرة لـ Banach, Brouwer, Tychonoff-Schauder, Kannan, Edelstein, Kirk و .Caristi

  في الباب الثالث, أخذنا بعين الاعتبار مفهوم الفضاء المتري المحدب-$W$ (WCM). كما درسنا بعضا من نتائج النقاط الثابتة و أفضل تقريب في هذه الفضاءات.

    أما الباب الرابع فهو مخصص لدراسة أنواع مختلفة من الفضاءات المترية المحدبة-$ M$. كما سنناقش العلاقة بين الفضاءات من هذا القبيل. أيضا نعطي بعض النتائج على النقاط ثابتة وأفضل تقريب في الفضاءات المترية المحدبة-$ M$الحادة.

    وأخيرا، في الباب الخامس،ندرس الفضاءات الفوق محدبة وفضاءات CAT(0)و ℝ-trees. عن التطبيقات، نقدم مرة أخرى بعضا من نظريات النقطة الثابتة و أفضل تقريب في فضاءات من هذا القبيل.